BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO **KỲ THI TỐT NGHIỆP TRUNG HỌC PHỔ THÔNG NĂM 2016**

Môn thi: TOÁN – Giáo dục trung học phổ thông

ĐỀ THI CHÍNH THỨC **Thời gian làm bài: 180 phút, không kể thời gian giao đề**

Câu I ***(1,0 điểm)***

1. Cho số phức z thỏa mãn $z = 1 + 2i$. Tìm phần thực và phần ảo của số phức $w = 2z + \bar{z}$.

2. Cho $\log_2 x = \sqrt{2}$. Tính giá trị của biểu thức $A = \log_2 x^2 + \log_{\frac{1}{2}} x^3 + \log_4 x$

Câu II (1,0 điểm) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = -x^4 + 2x^2$.

Câu III ***(1,0 điểm)*** Tìm m để hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 + mx - 1$ có hai điểm cực trị. Gọi x_1, x_2 là hai điểm cực trị đó, tìm m để $x_1^2 + x_2^2 = 3$.

Câu IV : Tính tích phân $I = \int_0^3 3x(x + \sqrt{x^2 + 16})\,dx$

Câu V(1,0 điểm) : Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho ba điểm A(3;2;-2), B(1;0;1) và C(2;-1;3). Viết phương trình mặt phẳng đi qua A và vuông góc với đường thẳng BC. Tìm tọa độ hình chiếu vuông góc của A trên đường thẳng BC.

Câu VI (1,0 điểm) :

1. Giải phương trình $2\sin^2 x + 7\sin x - 4 = 0$.

2. Học sinh A thiết kế bảng điều khiển điện tử mở cửa phòng học của lớp mình. Bảng gồm 10 nút, mỗi nút được ghi một số từ 0 đến 9 và không có hai nút nào được ghi cùng một số. Để mở cửa cần nhấn liên tiếp 3 nút khác nhau sao cho 3 số trên 3 nút đó theo thứ tự đã nhấn tạo thành một dãy số tăng và có tổng bằng 10. Học sinh B không biết quy tắc mở cửa trên, đã nhấn ngẫu nhiên liên tiếp 3 nút khác nhau trên bảng điều khiển. Tính xác suất để B mở được cửa phòng học đó.

Câu VII(1,0 điểm): Cho lăng trụ *ABC.A'B'C'* có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, AC =2a. Hình chiếu vuông góc của A' trên mặt phẳng (ABC) là trung điểm của cạnh AC, đường thẳng A'B tạo với mặt phẳng (ABC) một góc 45^0. Tính theo a thể tích khối lăng trụ *ABC.A'B'C'* và chứng minh A'B vuông góc với B'C.

Câu VIII (1,0 điểm): Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn đường kính BD. Gọi M, N lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên các đường thẳng BC, BD và P là giao điểm của hai đường thẳng MN, AC. Biết đường thẳng AC có phương trình $x - y - 1 = 0$. M (0;4), N(2;2) và hoành độ điểm A nhỏ hơn 2. Tìm tọa độ các điểm P, A và B.

Câu IX(1,0 điểm) : Giải phương trình

$$3\log_3^2(\sqrt{2+x} + \sqrt{2-x}) + 2\log_{\frac{1}{3}}(\sqrt{2+x} + \sqrt{2-x}).\log_3(9x^3) + (1 - \log_{\frac{1}{3}} x)^2 = 0$$

Câu X (1,0 điểm): Xét các số thực x, y thỏa mãn $x + y + 1 = 2(\sqrt{x-2} + \sqrt{y+3})(*)$

1. Tìm giá trị lớn nhất của $x + y$

2. Tìm m để $3^{x+y-4} + (x + y + 1)2^{7-x-y} - 3(x^2 + y^2) \le m$ đúng với mọi x,y thỏa mãn (*)

BÀI GIẢI

Câu I:

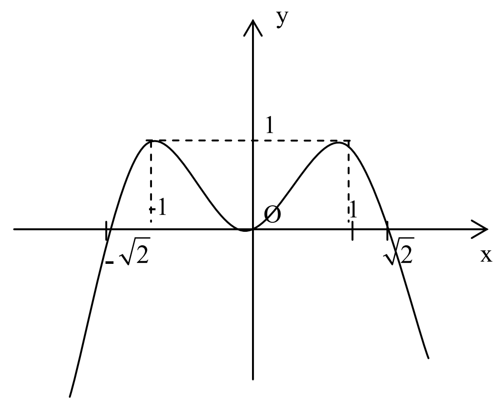
1. $\bar{z} = 1 - 2i$ $w = 2(1 + 2i) + (1 - 2i) = 3 + 2i$.

Vậy phần thực là 3, ảo là 2.

2. $\log_2 x = \sqrt{2}$

$A = 2\log_2 x + (-3)\log_2 x + \frac{1}{2}\log_2 x = 2\sqrt{2} - 3\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2} = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$

Câu II: Khảo sát hàm số và vẽ đồ thị. $y = -x^4 + 2x^2$



Tập xác định là R. $y' = -4x^3 + 4x$

$y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$ *hay* $x = \pm 1$

$y(0) = 0$; $y(\pm 1) = 1$

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		+	0	-	0	+	0	-	
y	$-\infty$	↗	1	↘	0	↗	1	↘	$-\infty$

Hàm số đồng biến trên $(-\infty, -1)$ và (0; 1)
Hàm số nghịch biến trên (-1; 0) và $(1; +\infty)$
Hàm số đạt cực đại tại $x = \pm 1$ và y = 1
Hàm số đạt cực tiểu tại x = 0 và y = 0
$\lim_{x \to \pm\infty} y = -\infty$

Câu III: $f'(x) = 3x^2 - 6x + m$

$\Delta' = 9 - 3m > 0 \Leftrightarrow m < 3$. Hàm f có 2 cực trị khi và chỉ khi m < 3

Khi m < 3 ta có $x_1 + x_2 = 2$; $x_1x_2 = \frac{m}{3}$

Ycbt $\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 3$ và $m < 3 \Leftrightarrow 4 - \frac{2m}{3} = 3$ và m < 3

$\Leftrightarrow 3 = 2m$, $m < 3 \Leftrightarrow m = \frac{3}{2}$

Câu IV:

$$I = \int_0^3 3x(x + \sqrt{x^2+16})\,dx = 3\int_0^3 (x^2 + x\sqrt{x^2+16})dx = 3\left[\int_0^3 x^2dx + \int_0^3 x\sqrt{x^2+16}dx\right]$$

$I_1 = \int_0^3 x^2dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^3 = \frac{27}{3} = 9$; $I_2 = \int_0^3 x\sqrt{x^2+16}dx$

Đặt $t = \sqrt{x^2+16}$ Đổi cận $t(0) = 4$, $t(3) = 5$, $t^2 = x^2 + 16 \Rightarrow 2tdt = 2xdx$

$\Rightarrow I_2 = \int_4^5 t.tdt = \left.\frac{t^3}{3}\right|_4^5 = \frac{5^3}{3} - \frac{4^3}{3}$

$I = 3(9 + \frac{125}{3} - \frac{64}{3}) = 88$

Câu V: A (3, 2, -2); B(1, 0, 1); C (2; -1; 3)

$\overrightarrow{BC} = (1; -1; 2) \Rightarrow (BC)$: $\frac{x-1}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z-1}{2}$

Gọi (P) là mp chứa A và vuông góc BC thì : (P) : $x - y + 2z + 3 = 0$

A' là hình chiếu vuông góc của A trên BC thì $\{A'\} = (P) \cap (BC)$ nên tọa độ A' thỏa :

$\begin{cases} x - y + 2z + 3 = 0 \\ \frac{x-1}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z-1}{2} \end{cases} \Rightarrow$ A' (0; 1; -1)

Câu VI:

1. $2\sin^2x + 7\sin x - 4 = 0 \Leftrightarrow \sin x = -4$ (VN) hay $\sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k2\pi$ hay $x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi$ $(k \in Z)$

2. Số cách chọn 3 nút để nhấn trong 10 nút là : $A_{10}^3 = 720$

Số trường hợp thỏa mãn ycbt là : (0,1,9); (0,2,8); (0,3,7); (0,4,6); (1,2,7); (1,3,6); (1,4,5); (2,3,5)

$\Rightarrow$ Xác suất để B mở được cửa phòng học là : $\dfrac{8}{720} = \dfrac{1}{90}$.

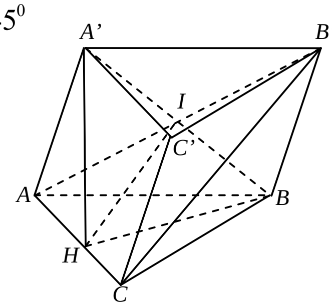
Câu VII:

Gọi H là trung điểm $AC \Rightarrow A'H \perp (ABC) \Rightarrow \left(A'B,(ABC)\right) = \widehat{A'BH} = 45^0$

$\Delta A'HB$ vuông cân tại H $\Rightarrow A'H = BH = \dfrac{AC}{2} = a$

$V = \dfrac{1}{2} BA.BC.A'H = a^3$

Gọi $I = A'B \cap AB'$ $\Rightarrow HI // B'C$ và $HI \perp A'B$ $\Rightarrow A'B \perp B'C$ (đpcm)



Câu VIII:

Pt $MN: x + y - 4 = 0$, $P = MN \cap AC \Rightarrow P\left(\dfrac{5}{2};\dfrac{3}{2}\right)$

$ABMN$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{M_1} = \widehat{A_1}$ và $\widehat{A_1} = \widehat{D_1}$, $\widehat{D_1} = \widehat{C_1}$ $\Rightarrow \widehat{M_1} = \widehat{C_1}$

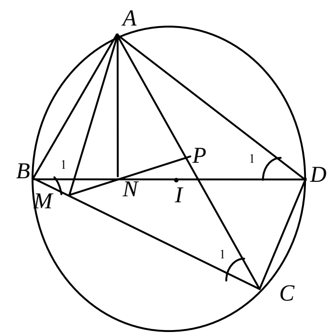
$\Rightarrow P$ là trung điểm AC

$A \in AC \Rightarrow A(a; a-1)$ $(a < 2)$

$PA^2 = PM^2 \Leftrightarrow a = 0 \Rightarrow A(0;-1) \Rightarrow C(5;4)$

Pt MC : y = 4 $\Rightarrow$ B (b; 4)

Ta có: $\overrightarrow{BN} \perp \overrightarrow{AN} \Leftrightarrow b = -1 \Rightarrow B(-1; 4)$



Câu IX: Điều kiện **:** $0 < x \le 2$

$3\log_3^2(\sqrt{2+x} + \sqrt{2-x}) - 2\log_3((\sqrt{2+x} + \sqrt{2-x}).2(\log_3(x) + 1) + (1 + \log_3 x)^2 = 0$

Đặt $\log_3(\sqrt{2+x} + \sqrt{2-x}) = a; 1 + \log_3(x) = b$

PT $\Leftrightarrow 3a^2 - 4ab + b^2 = 0 \Leftrightarrow (a-b)(3a-b) = 0$

Xét hai trường hợp :

TH1: a = b hay $\log_3(\sqrt{2+x} + \sqrt{2-x}) = \log_3(x) + 1$

$\Leftrightarrow \sqrt{2+x} + \sqrt{2-x} = 3x$

$\Leftrightarrow 4 + 2\sqrt{4-x^2} = 9x^2$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{4-x^2} = 9x^2 - 4 \Leftrightarrow \begin{cases} 9x^2 - 4 \ge 0 \\ 4(4-x^2) = 81x^4 - 72x^2 + 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 \ge \dfrac{4}{9} \\ 81x^4 = 68x^2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \mathbf{x^2 = \dfrac{68}{81}} \Leftrightarrow \mathbf{x = \dfrac{2\sqrt{17}}{9}}$ **(**vì $0 < x \le 2$)

TH2: 3a = b

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{2+x} + \sqrt{2-x}\right)^3 = 3x$

Do $\left(\sqrt{2+x} + \sqrt{2-x}\right)^2 = 4 + 2\sqrt{4-x^2} \ge 4$ nên $\left(\sqrt{2+x} + \sqrt{2-x}\right)^3 \ge 8 > 3x$ **(**vì $0 < x \le 2$)

Do đó TH2 loại

Vậy phương trình có nghiệm là : **x** = $\dfrac{2\sqrt{17}}{9}$

Câu X:

1. Giả thiết ⇒ $(x + y + 1)^2 = 4(\sqrt{x+2}+\sqrt{y+3})^2 \le 4.2(x-2+y+3)$

(do $(a + b)^2 \le 2(a^2 + b^2)$)

⇔ $(x + y + 1)^2 \le 8(x + y + 1)$

⇔ $(x + y + 1)(x + y - 7) \le 0$ ⇔ $-1 \le x + y \le 7$ (a)

$x + y = 7 \Rightarrow \begin{cases} x+y=7 \\ x-2=y+3 \end{cases}$

⇔ $\begin{cases} x=6 \\ y=1 \end{cases}$. Vậy max $(x + y) = 7$ (đạt được khi $x = 6$ và $y = 1$)

2. Ta có: $x + y + 1 = 2\left(\sqrt{x-2}+\sqrt{y+3}\right) \ge 2\sqrt{x+y+1}$

⇒ $(x + y + 1)^2 \ge 4(x + y + 1)$ ⇔ $x + y \le -1$ hay $x + y \ge 3$ (b)

Từ (a) và (b) ⇒ $t = x + y + 1 = 0$ hay $4 \le t = x + y + 1 \le 8$

Với $t = 0 \Rightarrow x + y = -1$ và $\sqrt{x-2}\sqrt{y+3} = 0 \Rightarrow x = 2$ và $y = -3$

⇒ $A = 3^{x+y-4} + (x+y+1)2^{7-x-y} - 3(x^2+y^2) = -\dfrac{9746}{243}$

Khi $4 \le t = x + y + 1 \le 8$

Đặt $f(x) = 3^{t-3} + t.\,2^{8-t}$ với $t \in [4,8]$

$f'(t) = 3^{t-3}.\ln 3 + 2^{8-t} - t.2^{8-t}.\ln 2$

$f''(t) > 0$ với mọi $t \ge 4$

$g(t) = f'(t)$ liên tục trên [4, 8] và $g(4).g(8) < 0$ ⇒ PT $g(t) = 0$ có nghiệm trên (4; 8)

⇒ tồn tại $t_0 \in (4, 8)$ để $f'(t_0) = 0 \Rightarrow f'(t) < 0\ \forall\ t \in (4, t_0)$ và $f'(t) > 0\ \forall t \in (t_0, 8)$

⇒ f nghịch biến trên $(4, t_0)$ và đồng biến trên $(t_0, 8)$

Ta có $f(4) = \dfrac{193}{3}$ và $f(8) = 35$ (1)

Ta chứng minh : $x^2 + y^2 \ge 5$ với $x + y \ge 3$ và $x \ge 2$

$x \in [2; 3] \Rightarrow y \ge 3 - x \ge 0 \Rightarrow y^2 \ge 9 - 6x + x^2$

⇒ $x^2 + y^2 \ge 2x^2 - 6x + 9 = 2(x - 2)(x - 1) + 5 \ge 5,\ \forall x \ge 2$

Với $x > 3 \Rightarrow x^2 + y^2 > 9$

Vậy $x^2 + y^2 \ge 5$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $3^{x+y-4} + (x+y+1)2^{7-x-y} - 3(x^2+y^2) \le \dfrac{148}{3}$, với mọi x, y thỏa mãn (*)

Khi $x = 2$; $y = 1$ ta có : $A = \dfrac{148}{3}$. Vậy ycbt ⇔ $m \ge \dfrac{148}{3}$

<u>Cách 2</u>: Đặt $t = x + y$, $t \in [3, 7]$

Ta có: $(x + y + 2)^2 \le (2x + y)^2 \le 5(x^2 + y^2)$

⇒ $x^2 + y^2 \ge \dfrac{1}{5}(x + y + 2)^2 = \dfrac{1}{5}(t + 2)^2$

Vậy $P \le 3^{t-4} + (t + 1)2^{7-t} - \dfrac{3}{5}(t + 2)^2 = f(t)$

f liên tục trên [3; 7]

$f'(t) = 3^{t-4}\ln 3 + 2^{7-t} - (t + 1)2^{7-t}\ln 2 - \dfrac{6}{5}(t + 2)$

$f''(t) = 3^{t-4}\ln^2 3 + [(t+1)\ln^2 2 - 2\ln 2].2^{7-t} > 0$, $\forall t \in [3, 7] \cup \{-1\}$

max f = max {f(3), f(7), f(-1)} = f(3) = $\frac{148}{3}$

Vậy m ≥ $\frac{148}{3}$.

Ths. Hoàng Hữu Vinh, Trần Minh Quang
(Trường THPT Vĩnh Viễn – TP.HCM)