BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

ĐỀ CHÍNH THỨC

ĐỀ THI TUYỂN SINH ĐẠI HỌC, CAO ĐẲNG NĂM 2005

Môn: TOÁN, khối D

Thời gian làm bài: 180 phút, không kể thời gian phát đề

Câu I (2 điểm)

Gọi (C_m) là đồ thị của hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{m}{2}x^2 + \frac{1}{3}$ (*) (m là tham số)

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (*) khi $m = 2$.

2) Gọi M là điểm thuộc (C_m) có hoành độ bằng -1. Tìm m để tiếp tuyến của (C_m) tại điểm M song song với đường thẳng $5x - y = 0$.

Câu II (2 điểm)

Giải các phương trình sau:

1) $2\sqrt{x + 2 + 2\sqrt{x+1}} - \sqrt{x+1} = 4$

2) $\cos^4 x + \sin^4 x + \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{3}{2} = 0$

Câu III (3 điểm)

1) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho điểm C(2; 0) và elíp $(E): \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$. Tìm tọa độ các điểm A, B thuộc (E), biết rằng hai điểm A, B đối xứng nhau qua trục hoành và tam giác ABC là tam giác đều.

2) Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho hai đường thẳng

$$d_1: \frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z+1}{2} \text{ và } d_2: \begin{cases} x + y - z - 2 = 0 \\ x + 3y - 12 = 0 \end{cases}$$

a) Chứng minh rằng d_1 và d_2 song song nhau. Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa cả hai đường thẳng d_1 và d_2.

b) Mặt phẳng tọa độ Oxz cắt hai đường thẳng d_1, d_2 lần lượt tại các điểm A, B. Tính diện tích tam giác OAB (O là gốc tọa độ).

Câu IV (2 điểm)

1) Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(e^{\sin x} + \cos x\right)\cos x.dx$

2) Tính giá trị của biểu thức $M = \frac{A_{n+1}^4 + 3A_n^3}{(n+1)!}$; biết rằng $C_{n+1}^2 + 2C_{n+2}^2 + 2C_{n+3}^2 + C_{n+4}^2 = 149$ (n là số nguyên dương, A_n^k là số chỉnh hợp chập k của n phần tử và C_n^k là số tổ hợp chập k của n phần tử).

Câu V (1 điểm)

Cho các số dương x, y, z thỏa mãn $xyz = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{\sqrt{1 + x^3 + y^3}}{xy} + \frac{\sqrt{1 + y^3 + z^3}}{yz} + \frac{\sqrt{1 + z^3 + x^3}}{zx} \geq 3\sqrt{3}$$

Khi nào đẳng thức xảy ra?

--------- Hết ---------

BÀI GIẢI DO BAN GIẢNG VIÊN TRUNG TÂM **NGUỒN SÁNG**

(***TRƯỜNG ĐH SƯ PHẠM TP.HCM***) THỰC HIỆN

Văn phòng: 293 An Dương Vương, P.3, Q.5 ☎: 9.003.281

Câu I: (*2 điểm*)

1) Khi m = 2: $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + \frac{1}{3}$

D = R

$y' = x^2 - 2x$; $y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right.$

$y'' = 2x - 2$; $y'' = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y''		−	**0**	+	
ĐTHS	**Lồi**		$-\frac{1}{3}$ **Điểm uốn**	**Lõm**	

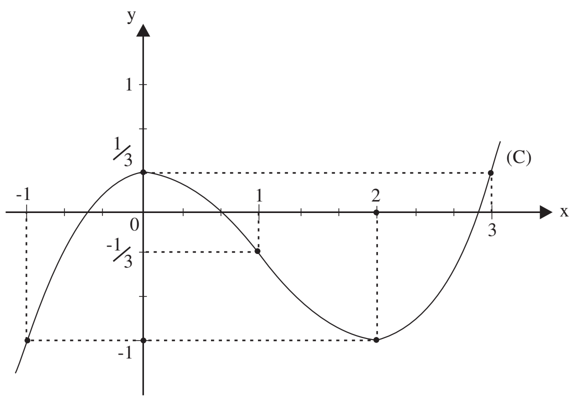
$\lim_{x\to+\infty} y = +\infty$; $\lim_{x\to-\infty} y = -\infty$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		**0**		**2**		$+\infty$
y'		+	**0**	−	**0**	+	
y	$-\infty$	↗	$\frac{1}{3}$ **CĐ**	↘	**−1 CT**	↗	$+\infty$

Điểm đặc biệt: $\left(3;\frac{1}{3}\right);(-1;-1)$

Đồ thị



2) $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{m}{2}x^2 + \frac{1}{3} \Rightarrow y' = x^2 - mx$

Hệ số góc tiếp tuyến của (C_m) tại M: $y'(-1) = 1 + m$

Tiếp tuyến của (C_m) tại M song song với đường thẳng $y = 5x \Rightarrow y'(-1) = 5 \Leftrightarrow m = 4$

Khi m = 4, ta có tiếp tuyến với đồ thị (C_4) tại điểm M(- 1; - 2) là: y = 5x + 3.

Vậy m = 4 (thỏa yêu cầu bài toán)

<u>Câu II</u>: (*2 điểm*)

1) <u>Cách 1</u>:

Đặt $t = \sqrt{x+1}$, $t \geq 0 \Rightarrow t^2 = x + 1$

Phương trình đã cho thành: $2\sqrt{t^2 + 2t + 1} - t = 4 \Leftrightarrow 2(t+1) - t = 4$ (vì $t \geq 0$) $\Leftrightarrow t = 2$

Phương trình đã cho $\Leftrightarrow \sqrt{x+1} = 2 \Leftrightarrow x + 1 = 4 \Leftrightarrow x = 3$

<u>Cách 2</u>:

Điều kiện $x \geq -1$

Phương trình đã cho $\Leftrightarrow 2\sqrt{x + 2 + 2\sqrt{x+1}} = 4 + \sqrt{x+1}$

$4(x + 2 + 2\sqrt{x+1}) = 16 + 8\sqrt{x+1} + x + 1$

$\Leftrightarrow 3x = 9 \Leftrightarrow x = 3$ (*thỏa điều kiện* $x \geq 1$)

2) Phương trình đã cho $\Leftrightarrow 1 - 2\sin^2 x\cos^2 x + \frac{1}{2}\left[\sin\left(4x - \frac{\pi}{2}\right) + \sin 2x\right] - \frac{3}{2} = 0$

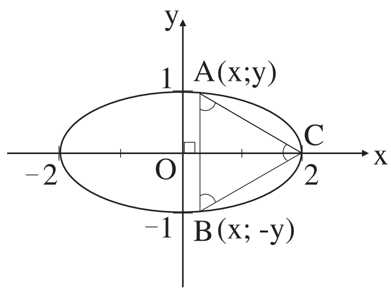
$\Leftrightarrow 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x + \frac{1}{2}\left(-\cos 4x + \sin 2x\right) - \frac{3}{2} = 0$

$\Leftrightarrow -\sin^2 2x + (2\sin^2 2x - 1 + \sin 2x) - 1 = 0$

$\Leftrightarrow \sin^2 2x + \sin 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin 2x = 1 \\ \sin 2x = -2 (loại) \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in Z$

<u>Câu III</u>: (*3 điểm*)



1. Gọi A(x; y) $\Rightarrow$ B(x; -y) (A, B đối xứng qua trục hoành)

$AB = 2|y| > 0;\ CA = \sqrt{(x-2)^2 + y^2}$

Do C(2, 0) $\in$ Ox $\Rightarrow$ ΔABC cân tại C

Với $y^2 = 1 - \dfrac{x^2}{4}$ do A, B $\in$ (E) (1) Đk: $x \neq \pm 2$

Yêu cầu bài toán ΔABC đều $\Leftrightarrow$ CA = AB $\Leftrightarrow$ $4y^2 = (x - 2)^2 + y^2$

$\Leftrightarrow (x - 2)^2 - 3\left(1 - \dfrac{x^2}{4}\right) = 0$

$\Leftrightarrow 7x^2 - 16x + 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2\ \ (loại) \\ x = \dfrac{2}{7}\ \ (nhận);\ (1) \Rightarrow y = \pm\dfrac{4\sqrt{3}}{7} \end{array}\right.$

Vậy $A\left(\dfrac{2}{7};\dfrac{4\sqrt{3}}{7}\right); B\left(\dfrac{2}{7};\dfrac{-4\sqrt{3}}{7}\right)$ hoặc $A\left(\dfrac{2}{7};\dfrac{-4\sqrt{3}}{7}\right); B\left(\dfrac{2}{7};\dfrac{4\sqrt{3}}{7}\right)$

2. a) Ta có: $d_1 : \begin{cases} qua\ M_1(1;-2;-1) \\ vtcp\ \vec{a}_1 = (3;-1;2) \end{cases}$

d_2 có vtcp $\vec{a}_2 = \left(\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix};\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix};\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}\right) = (3;-1;2)$

Ta có: $\begin{cases} \vec{a}_1 = \vec{a}_2 \\ M_1 \notin d_2 \end{cases} \Leftrightarrow d_1 // d_2$ (đpcm).

Vì (P) chứa d_2 nên phương trình (P) có dạng là:

$\lambda(x + y - z - 2) + \mu(x + 3y - 12) = 0;\ \lambda^2 + \mu^2 \neq 0$ (1)

$d_1 \subset (P) \Rightarrow M_1 \in (P) \Rightarrow \lambda(1 - 2 + 1 - 2) + \mu(1 - 6 - 12) = 0;\ \lambda^2 + \mu^2 \neq 0$

$\Rightarrow -2\lambda - 17\mu = 0 \Leftrightarrow 2\lambda = -17\mu$.

Chọn $\lambda = 17 \Rightarrow \mu = -2$: (1) suy ra (P): $15x + 11y - 17z - 10 = 0$.

b) Mặt phẳng Oxz có phương trình: y = 0

Tọa độ giao điểm A của d_1 với mặt phẳng Oxz là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} y = 0 \\ \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y+2}{-1} = \dfrac{z+1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -5 \\ y = 0 \\ z = -5 \end{cases} \Rightarrow A(-5;0;-5)$$

Tọa độ giao điểm B của d_2 với mặt phẳng Oxz là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} y = 0 \\ x + y - z - 2 = 0 \\ x + 3y - 12 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 12 \\ y = 0 \\ z = 10 \end{cases} \Rightarrow B(12;0;10).$$

Diện tích tam giác OAB được tính bằng công thức:

$$S_{\Delta OAB} = \frac{1}{2}\left\|\left[\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right]\right\|, \text{ với } \left[\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right] = (0;-10;0)$$

$$\Rightarrow S_{\Delta OAB} = \frac{10}{2} = 5 \text{ đvdt}$$

<u>Câu IV</u>: (*2 điểm*)

1) $$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin x}\cos x dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin x} d(\sin x) + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2x) dx$$

$$= e^{\sin x}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2}\sin 2x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = e - 1 + \frac{\pi}{4}$$

2) $$C_{n+1}^2 + 2C_{n+2}^2 + 2C_{n+3}^2 + C_{n+4}^2 = 149$$

$$\Leftrightarrow \frac{n(n+1)}{2} + (n+1)(n+2) + (n+2)(n+3) + \frac{(n+3)(n+4)}{2} = 149$$

$$\Leftrightarrow 3n^2 + 12n - 135 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n = 5 \\ n = -9 \text{ (loại)} \end{array}\right.$$

Với n = 5: $M = \dfrac{A_6^4 + 3A_5^3}{6!} = \dfrac{\dfrac{6!}{2!} + 3.\dfrac{5!}{2!}}{6!} = \dfrac{3}{4}$

<u>Câu V:</u> (*1 điểm*)

Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho 3 số: 1, x > 0, y > 0 ta được:

$$1 + x^3 + y^3 \geq 3\sqrt[3]{x^3y^3} = 3xy$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{1+x^3+y^3}}{xy} \geq \frac{\sqrt{3xy}}{xy} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{xy}} \qquad (1)$$

Tương tự: $$\frac{\sqrt{1+y^3+z^3}}{yz} \geq \frac{\sqrt{3yz}}{yz} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{yz}} \qquad (2)$$

$$\frac{\sqrt{1+z^3+x^3}}{zx} \geq \frac{\sqrt{3zx}}{zx} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{zx}} \qquad (3)$$

(1), (2), (3) cho:

$$\frac{\sqrt{1+x^3+y^3}}{xy} + \frac{\sqrt{1+y^3+z^3}}{yz} + \frac{\sqrt{1+z^3+x^3}}{zx} \geq \sqrt{3}\left(\frac{1}{\sqrt{xy}} + \frac{1}{\sqrt{yz}} + \frac{1}{\sqrt{zx}}\right)$$

$$\overset{Côsi}{\geq} \sqrt{3}\left(3.\sqrt[3]{\frac{1}{\sqrt{x^2y^2z^2}}}\right) = 3\sqrt{3} \quad (do\ xyz = 1)$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} x = y = 1 \\ y = z = 1 \\ z = x = 1 \\ xy = yz = zx \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z = 1$

----- HẾT -----